Impaccando T-tagli e T-giunti

Romeo Rizzi

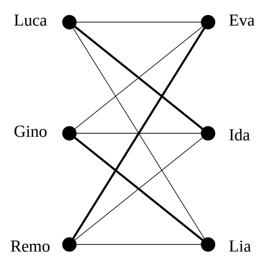
February 16, 2000

La tesi affronta alcuni problemi in teoria dei grafi. Un elenco dei risultati è posto in appendice. Ci soffermiamo ora su due temi guida per esplicare le motivazioni della nostra ricerca, introdurre i risultati ottenuti e chiarirne la portata e l'interesse.

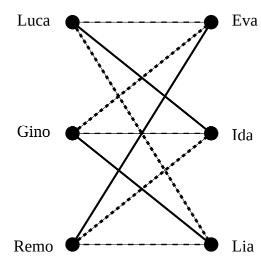
Il seguente risultato del matematico ungherese Dénes Kőnig (1916) ebbe particolare influsso sulla disciplina, allora nascente, della teoria dei grafi.

Teorema **1** *Ogni grafo bipartito e regolare contiene un accoppiamento perfetto.*

Tale teorema è noto come il "Teorema dei Matrimoni" per le ragioni suggerite in figura, dove ogni arco individua una coppia (uomo/donna) matrimoniabile. L'ipotesi di bipartizione è tesa ad impedire archi di tipo uomo/uomo o donna/donna. L'ipotesi di regolarità impone che ogni nodo faccia capo ad uno stesso numero di archi.



Accoppiamento Perfetto



Giro di Balli o Colorazione

Il "Teorema dei Balli" di Kőnig (1916) è la seguente riformulazione del Teorema 1:

Teorema **2** *Agli archi di un grafo bipartito e regolare è possibile associare dei colori di modo che ad ogni nodo sia incidente uno ed un solo arco di ciascun colore.*

Qualora il grafo non sia regolare è consuetudine indicare con Δ la massima valenza nel grafo, ossia il numero massimo di archi facenti capo ad uno stesso nodo. È sempre possibile aggiungere archi e nodi in modo da ottenere un grafo regolare senza distruggere la bipartizione o incrementare la massima valenza Δ. Ciò conduce alla formulazione di maggiore interesse per le applicazioni pratiche:

Teorema **3** *In un grafo bipartito G sia Δ il numero massimo di archi incidenti ad uno stesso nodo. Allora, utilizzando Δ colori distinti, è possibile colorare gli archi di G di modo che ad ogni nodo sia incidente al più un arco di ciascun colore.*

APPLICAZIONE TIPO: **Stesura degli orari in una scuola.**

È data una lista L di coppie (c, i) classe-insegnante. Una stessa coppia può apparire più volte in L ed indica, ad ogni occorrenza, una diversa ora di lezione da allocarsi nell'orario. Un Orario Settimanale è un assegnamento di ore, da un insieme di ore disponibili H, alle coppie (c, i) in L, dove due coppie con la stessa classe o con lo stesso insegnante ricevono ore diverse di H.

Teorema 3 implica che un Orario Settimanale esiste se e solo se il numero di ore in H non è inferiore al massimo numero di volte che un insegnante od una classe appaiono in L.

La tesi contiene una semplice dimostrazione dei Teoremi 1 e 2. Tale dimostrazione, pur nella sua brevità, non poggia su altri risultati. Essa verrà pubblicata da *Journal of Graph Theory* ed è stata apprezzata dai più insigni studiosi di teoria dei grafi.

TEOREMA **4** *Ogni grafo bipartito e regolare è fattorizzabile.*

DIMOSTRAZIONE. Sia G un controesempio col minor numero di archi. Allora G è r-regolare per un qualche intero $r \geq 1$. Sia $e = uv$ un arco di G. In G, rimuoviamo i nodi u e v, ed aggiungiamo quindi un insieme di archi F in modo da ottenere un grafo G' bipartito e r-regolare. Si noti che $|F| < r$ e che G' ha meno archi di G. Per l'assunzione di minimalità, G' contiene r 1-fattori disgiunti. Poichè $|F| < r$, almeno uno di questi 1-fattori, sia M', è disgiunto da F. Pertanto $M = M' \cup \{e\}$ è un 1-fattore di G. Ora $G \setminus M$ è fattorizzabile. Ma allora G è fattorizzabile. ∎

Nel caso non bipartito il problema della fattorizzazione di grafi si complica assai. Per un teorema fondamentale di Jack Edmonds (1965) l'attenzione va ristretta ai soli r-grafi (grafi r-regolari dove, per ogni insieme dispari di nodi S, almeno r archi hanno precisamente un estremo in S). Il primo 3-grafo non fattorizzabile è dovuto a Julius Petersen (1898). Si pensava tuttavia che per $r \geq 4$ ogni r-grafo fosse quantomeno scomponibile come somma di un r_1-grafo e di un r_2-grafo, con $r_1 + r_2 = r$. La tesi ha sfatato questa ed altre convinzioni sulla scomponibilità degli r-grafi.

Ma passiamo ad un'altro tema della tesi. Un grafto (G, T) è un grafo G ed un insieme di nodi T con $|T|$ pari. Ad ogni arco e di G è associato un reale non-negativo c_e, detto la *capacità* di e. Dato un insieme di nodi S, il *taglio* $\delta_G(S)$ è l'insieme degli archi con una ed una sola estremità in S. Se $|S \cap T|$ è dispari allora $\delta_G(S)$ è un *T-taglio.* Un T-taglio minimo di (G, T, c) è un T-taglio $\delta(X)$ di (G, T) tale che:

$$c(\delta(X)) = \lambda_{G,T} = \min\{c(\delta(S)) \ : \delta(S) \text{ è un } T\text{-taglio di } (G, T)\}$$

dove la capacità $c(F)$ di un insieme F di archi è definita come $\sum_{e \in F} c_e$.

Un T-*accoppiamento* è una partizione $\mathcal{P}$ di T tale che $|P| = 2$ per ogni classe P di $\mathcal{P}$. Definiamo il valore di un T-accoppiamento $\mathcal{P}$ come $val_G(\mathcal{P}) = \min_{\{u,v\} \in \mathcal{P}} \lambda_{G,\{u,v\}}$.

Un risultato offerto dalla tesi è il seguente.

TEOREMA **5** *La minima capacità di un T-taglio eguaglia sempre il massimo valore di un T-accoppiamento.*

Dato un insieme di nodi S con $|S \cap T|$ pari, indichiamo con G_S il grafo ottenuto da G identificando tutti i nodi in S in un singolo nodo. Se definiamo $T_S = T \setminus S$ allora (G_S, T_S) è un grafto. Il seguente algoritmo computa il valore $\lambda_{G,T}$.

Algoritmo T-TAGLIO (G, T, c)

---

1. se $T = \emptyset$ ritorna ∞; *commento:* (G, T) non contiene alcun T-taglio
2. siano s e t due nodi distinti di T;
3. sia $\delta(S)$ un $\{s, t\}$-taglio minimo;
4. se $\delta(S)$ è un T-taglio ritorna $\min\{c(\delta(S)), \text{T-TAGLIO } (G_{\{s,t\}}, T_{\{s,t\}}, c)\}$;
   altrimenti ritorna $\min\{\text{T-TAGLIO } (G_S, T_S, c), \text{T-TAGLIO } (G_{\overline{S}}, T_{\overline{S}}, c)\}$;

In effetti l'Algoritmo T-TAGLIO individua un T-taglio ed un T-accoppiamento ottimi e costituisce dimostrazione algoritmica del Teorema 5.

A. – Elenco dei risultati principali

1. Una nuova e semplice dimostrazione di un teorema di Kőnig secondo il quale ogni grafo bipartito e regolare è fattorizzabile. Interesse teorico e didattico.

2. Un algoritmo esatto ed uno approssimato per la colorazione di archi in grafi bipartiti. L'algoritmo esatto migliora sul limite asintotico del caso peggiore noto in precedenza. L'algoritmo approssimato è anch'esso il migliore nel suo genere, impiegando $\Delta + 2$ colori per colorare gli m archi di un grafo bipartito con grado massimo Δ in tempo $\mathcal{O}(m \log \Delta)$. Interesse applicativo e teorico.

3. Un nuovo algoritmo polinomiale per calcolare le distanze in grafi non diretti e conservativi. Questo algoritmo può essere utilizzato per trovare accoppiamenti e T-giunti ottimali. L'algoritmo è concettualmente semplice e diversi importanti teoremi possono essere dedotti da esso. L'interesse è principalmente teorico e didattico.

4. Un nuovo algoritmo per trovare T-tagli ottimali ed una caratterizzazione di tipo min-max per il valore di un T-taglio minimo. Ricordiamo come l'efficienza degli algoritmi di T-taglio minimo impiegati sia spesso un fattore critico in sistemi di tipo "branch and cut" per la soluzione di problemi *NP*-completi. Il nostro algoritmo è più efficiente ma soprattutto assai più semplice di quelli studiati ed impiegati precedentemente. Interesse applicativo, teorico e didattico.

5. Una miglior comprensione del nesso tra impaccare T-giunti e fattorizzare r-grafi. Tale collegamento era già stato osservato e studiato da Seymour. Le argomentazioni da noi fornite sono tuttavia molto più semplici ed anche più forti. In primo luogo, grazie alla nozione di grafto *semi-Euleriano* proposta nella tesi, è stato possibile formulare un chiaro "se e solo se". In secondo luogo, abbiamo attestato la finitezza del problema dell'impaccamento di T-giunti ogni qualvolta $|T|$ sia limitato da una costante. Risultati riguardanti l'impaccamento di T-giunti per piccoli valori di $|T|$ sono ricavati conseguentemente. Interesse teorico.

6. Esempi di r-grafi non scomponibili e di r-grafi poveramente accoppiabili per ogni $r > 3$. Questi evidenziano la falsità di varie ed importanti congetture proposte nella letteratura. Interesse teorico.

7. Utilizzando gli r-grafi non scomponibili, di cui al punto precedente, si è evidenziato come i coefficienti del sistema di Schrijver per il poliedro dei T-tagli possano essere comunque grandi. Interesse teorico.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Conforti e R. Rizzi, *Shortest Paths in Conservative Graphs*, apparirà in Discrete Mathematics

[2] A. Kapoor e R. Rizzi, *Edge-coloring bipartite graphs*, apparirà in SIAM Journal on Computing

[3] R. Rizzi, *Kőnig's Edge Coloring Theorem without augmenting paths*, apparirà in Journal of Graph Theory

[4] R. Rizzi, *Indecomposable r-graphs and some other counterexamples*, apparirà in Journal of Graph Theory

Dati concernenti la tesi e come contattare l'autore

Romeo Rizzi, via Zara n.8/D Trento — cap 38100 Trento (Italy)
e-mail: romeo@euler.math.unipd.it Tel. 0461.601196

Dottorato in Matematica Computazionale ed Informatica Matematica del IX^o Ciclo con sede in Padova†.

Coordinatore del Corso di Dottorato: Prof. Renato Zanovello†.
Relatore: Prof. Michele Conforti†.
Controrelatore: Prof. Bert Gerards, CWI, Amsterdam, Netherlands.

†Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Padova.